Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas
Enero - Marzo 2000
MA-2112

Nombre: ______________________

Carnet: ____________ Sección: ____

SEGUNDO PARCIAL-T

1. (12 puntos.) Calcular la integral

$$\int\int_D e^{(x-y)}\,(x+y)\;dx\,dy$$

donde D es la región acotada por el cuadrado de vértices $(2,2)$, $(4,0)$, $(4,4)$, $(6,2)$.
Indicación: utilizar un cambio de variable.
Justifique todas sus respuestas
SOLUCION.
Se ve que x varia entre 2 y 6. Para x fijo entre 2 y 4, y varia entre $4-x$ y x, es decir las cotas inferiores y superiores son las rectas $y=x$ y $y=4-x$. De manera semejante, para x entre 4 y 6, las cotas son las rectas $x-y=4$ y $y+x=8$. La región de integración es pues el paralelogramo encerrado por las cuatro rectas $y=x, y=4-x, y=8-x, y=x+4$.

Se hace el cambio de variables $u=x+y$, $v=x-y$. Despejando x y y, se tiene $x=(u+v)/2$, $y=(u-v)/2$. El Jacobiano es

$$J=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{vmatrix}$$

que da $J=-1/2$. La región de integración original es la imagen del rectángulo R^* encerrado por las rectas $u=4, v=0, u=8, v=4$. Por consiguiente, se tiene

$$I=\int\int_{R^*} ue^v.\frac{1}{2}dudv$$

que es

$$\frac{1}{2}\int_0^4\int_4^8 ue^v dudv$$

y este vale $12(e^4-1)$, usando los datos.

2. (13 puntos.) Calcular el volumen de la parte del cilindro $z^2 + y^2 = 2ay$ comprendido entre $z^2 + y^2 = 2ax$ y el plano yz..
Las siguientes identidades son de utilidad en la resolución del problema.

$cos^4\theta = \dfrac{3 + 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}$, $sen^4\theta = \dfrac{3 - 4\cos(2\theta) + \cos(4\theta)}{8}$

Justifique todas sus respuestas

SOLUCION.

Por definición de las integrales triples, El volumen buscado es

$$V = \int\int\int_{\Omega} dV$$

Se procede a calcular la integral triple como integral iterada. se hace un cambio $x \longleftrightarrow z$.

La ecuación $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ define un cílindro sobre la circunferencia en el plano xy que tiene la misma ecuación. Completando el cuadrado en la ecuación da $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, lo que demuestra que se trata de una circunferencia con centro $(0, a)$ y radio a. La región Ω es la parte interior del cílindro que yace dentro de $x^2 + y^2 = 2az$, que es un paraboloide en el origen. La proyección de Ω sobre el plano xy es $D = x^2 + (y-a)^2 \leq a^2$. Para un punto $(x, y) \in D$ fijo, z varia entre 0 y $\frac{x^2+y^2}{2a}$. Se tiene pues

$$V = \int\int_D \int_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}} dzdxdy$$

Cambiando a coordenadas cilídricas (r, θ, z), se tiene $dzdxdy = rdrd\theta dz$, y

$$V = \int\int_D \int_0^{r^2/2a} rdzdrd\theta = \int\int_D rr^2/2ardrd\theta$$

Queda por escribir la integral sobre D. Sustituyendo polares en la ecuación de la circunferencia borde de D da $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2ar\sin\theta = 0$, o sea $r = 2a\sin\theta$ ($r = 0$ corresponde al origen). Así pues, para θ fijo, $(r\theta)$ dentro de D permite r variar entre 0 y $2\sin\theta$. Mirando el dibujo, se ve que θ varia entre 0 y π. Así

$$V = 2\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2a\sin\theta} rr^2/2adr = 4a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^4\theta d\theta$$

Usando la ecuación de $\sin^4\theta$ lo que finalmente se obtiene es $\frac{3}{4}a^3\pi$.

3. (10 puntos.) Sea la trayectoria $\alpha : [0, 2\pi] \longmapsto \mathbb{R}^2$, definida por: $\alpha(t) = (cos^3 t,\ sen^3 t)$. Calcular la longitud de arco de la trayectoria.

   Justifique todas sus respuestas

   SOLUCION.

   $\alpha^{'}(t) = (-3cos^2 t\, sent,\ 3sen^2 t\, cost)$
   $||\alpha^{'}(t)|| = \sqrt{9cos^4 t\, sen^2 t + 9cos^2 t\, sen^4 t} = \sqrt{9cos^2 t sen^2 t(cos^2 t + sen^2 t)} = 3|cost\, sent|$.

   la longitud es una integral de trayectoria:
   $\int_0^{2\pi} ||\alpha^{'}(t)||dt = \int_0^{2\pi} 3|cost\, sent|dt$.

   eliminando el valor absoluto:
   $l = 3 * 4 \int_0^{\pi/2} cost\, sent\, dt = 6.$

   resultado: longitud $=6$.

4. (15 puntos.) Sea $W = \{(x,y,z)/\ x^2+y^2+z^2 \ \leq 4\ ,\ x^2+y^2 \ \leq 3z\ \}$ un sólido con densidad de masa constante.

   (a) Grafique el sólido.

   (b) Calcular el centro de masa de W.

   Justifique todas sus respuestas

   densidad$=k$

   En coordenadas cartesianas:

$$M = \int\int_D \int_{x^2+y^2/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} kdzdxdy$$

   con D la región $x^2+y^2=\sqrt{3}$.

   En coordenadas cilíndricas:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} krdzdrd\theta$$

   En coordenadas esféricas:
   $3z = x^2+y^2$, pasando a coordenadas esféricas:
   $3\rho cos\phi = \rho^2 sen\phi$, despejando ρ se obtiene: $\rho = 3cot\phi$ La esfera es $\rho = 2$ y el punto de intersección es en $z = 1$ por lo que $z = \rho cos\phi$ con $\rho = 2$ se obtiene $cos\phi = 1/2$ por lo tanto $\phi = \pi/3$.
   Obtenemos dos regiones:

   $M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^{2} k\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta\ +\ \int_0^{2\pi}\int_{\pi/3}^{\pi/2}\int_0^{3cot\phi} k\rho^2\sin\phi d\rho d\phi d\theta$.

   Finalmente el centro de masa, usando la simetría del sólido es:

   $(\bar{x},\bar{y},\bar{z}) = (0,0,\bar{z})$.
   Usando coordenadas cilíndricas:

$$\bar{z} = (1/M)\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} zrdzdrd\theta$$

   donde $M = k\frac{19}{6}\pi$

   calculando obtenemos:
   $\bar{z} = (1/M) * \frac{13}{4}\pi$,
   $\bar{z} = 29/38$.